Chapitre I
Magnétostatique dans le Vide

September 11, 2014

Contents

1 Généralités

- Une charge éléctrique q au repos crée en M un champ électrostatique

$$\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

ε_0 la permitivité du vide

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \simeq 8.84 \times 10^{-12} Fm^{-1}$$

- Quand la charge q est en mouvement ($\vec{v} \neq \vec{0}$), elle crée un champ *éléctromagnétique*

$$\vec{E} \quad , \quad \vec{B}$$

dont les lois sont

$$\begin{array}{lll} \text{div}\,\vec{E} = \frac{\boldsymbol{\varrho}}{\varepsilon_0} & , & rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 & , & rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{\partial\vec{E}}{c^2\partial t} \end{array}$$

avec:
$\boldsymbol{\varrho}$ la densité de charges éléctriques,
$\vec{j}$ la densité de courant et
$\boldsymbol{\mu}_0$ perméabilité du vide

$$\boldsymbol{\mu}_0 = 4\pi 10^{-7} Hm^{-1}$$

- Si on *ignore* les variations temporelles de $\vec{E}$ et $\vec{B}$; càd:

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \to \vec{0}, \qquad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \to \vec{0}$$

on aura:

$$\begin{array}{lll} \text{div}\,\vec{E} = \boldsymbol{\varrho}/\varepsilon_0 & , & rot\vec{E} = \vec{0} \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 & , & rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} \end{array}$$

ce qui permet l'étude séparée de l'électrostatique et de la magnétostatique.

- Dans ce chapitre, on fixe l'attention sur

magnétostatique

en particulier sur la production du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ à partir de densités permanentes de courants éléctriques $\vec{j}$.

2 Induction magnétique $\vec{B}$

On distinguera 2 situations:

- distribution discrète de charges $\{q_1, ..., q_n\}$ avec des vitesses $\vec{v}_i$ et par conséquent des courants de charges

$$\vec{J}_1 = q_1 \vec{v}_1, \quad \ldots \quad \vec{J}_n = q_n \vec{v}_n$$

- distribution continue de charges comme dans les circuits éléctriques:

$$\begin{array}{lcll} dq & = & \rho d\tau & : \text{ élément de charge} \\ d\vec{J} & = & dq\vec{v} = \rho\vec{v}d\tau & : \text{ élément de densité de courant} \end{array}$$

- $d\tau$ un élément de volume.
- Noter que l'élément de courant $d\vec{J}$ peut s'écrire aussi comme

$$d\vec{J} \quad = \quad \vec{j} d\tau$$

avec $\vec{j}$ la densité de courant

$$\vec{j} = \frac{d\vec{J}}{d\tau} = \rho\vec{v}$$

2.1 Champ $\vec{B}$ créé par des charges ponctuelles

A) *cas d'une charge*

Le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse $\vec{v} = \vec{v}\,(P)$ est:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, q\vec{v} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}} \tag{2.1}$$

a) 2 remarques:

(i) L'expression de $\vec{B} = \vec{B}\,(P, M)$ dépend en fait de 2 points:
- P ou se trouve la charge q
- M ou on calcule le champ;

(ii) Si $q = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$; alors, il n'y aura pas de champ

$$\vec{B} = \vec{0}$$

Autrement dit le champ $\vec{B}$ est crée par le courant de charge $\vec{J} = q\vec{v}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \vec{J} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}}$$

Unité du champ $\vec{B}$

Dans le système international, l'unité est le Tesla (T).
Dans le système CGS, l'unité est le Gauss (G); avec la relation

$$1G = 10^{-4}T$$

b) Propriétés de $\vec{B}$

(i) Le champ d'induction magnétque $\vec{B}(M)$ est donné par un

produit vectoriel : $\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\ \vec{J}\right) \wedge \left(\frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}\right)$

c'est un pseudo-vecteur.
Cette propriété jouera un role important dans la simplification du calcul de $\vec{B}$.

(ii) Le facteur μ_0 est rélié à la vitesse de la lumière $c = 3.10^8 m/\sec$ par la relation suivante

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

montant qu'il existe un lien très étroit entre l'éléctricité (ε_0), le magnétisme (μ_0) et la lumière (c).

B) *cas de plusieurs charges*

Le champ créé par 2 charges q_1 et q_2 au point M est donné par la somme des expressions des 2 champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ en M; c'est le principe de superposition:

$$\begin{array}{lcl} q_1 & \to & \vec{B}_1(M) \\ q_2 & \to & \vec{B}_2(M) \\ q_1, q_2 & \to & \vec{B}_{total}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) \end{array}$$

soit

$$\vec{B}_{total} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\ q_1\vec{v}_1 \wedge \frac{\overrightarrow{P_1M}}{|P_1M|^3}\right) + \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\ q_2\vec{v}_2 \wedge \frac{\overrightarrow{P_2M}}{|P_2M|^3}\right)$$

2.2 Champ $\vec{B}$ créé par une distribution de courants

Dans ce cas nous avons une distribution continue de charge qui peut être:
* volumique (3 dimensions),
* surfacique (2 dimensions),
* linéique (circuit filiforme).

Dans ce qui suit, on traitera le cas général et developpera avec détails le cas des

circuits filiformes

vue qu'ils sont les plus utilisés en pratique.

A) cas général

a) élément de champ $d\vec{B}$

Chaque élément de charge dq de vitesse $\vec{v}$, centré autour d'un point P, créé un $d\vec{B}$

$$d\vec{B} = \vec{b}d\tau \qquad \leftrightarrow \qquad \vec{b} = \frac{d\vec{B}}{d\tau}$$

donnée par

$$\begin{aligned} \vec{b}d\tau &= \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \, dq\vec{v} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3} \\ &= \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \, \rho\vec{v} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3} d\tau \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\vec{b} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \, \rho\vec{v} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}} \tag{2.2}$$

b) champ total: $\vec{B}$

Obtenu par integration sur tout le circuit conducteur

$$\vec{B}\,(M) = \iiint_{\text{volume}} \vec{b}d\tau$$

En remplacant $\vec{b}$, on a:

$$\vec{B}\,(M) = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \iiint_P \vec{j}\,(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3} d\tau \tag{2.3}$$

avec

$$\vec{j}\,(P) = \rho\vec{v}\,(P)$$

B) cas d'un circuit filiforme

C'est ce genre de circuit qui nous intéresse le plus dans ce chapitre

a) Expression de $\vec{B}$
donnée par la loi de *Biot et Savart*

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} I\overrightarrow{dl} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}} \tag{2.4}$$

b) *preuve*
Cette relation peut être obtenue à partir de

$$\vec{B}(M) = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \iiint_P \vec{j}(P) \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3} d\tau$$

comme suit:

(i) décomposer l'élément de volume $d\tau$ comme le produit

$$d\tau = \overrightarrow{dS}.\overrightarrow{dl} = dSdl$$

où $\overrightarrow{dS}$ est un élément de surface de la section du fil et $\overrightarrow{dl}$ est un élément de longueur.

(ii) remplacer dans la relation (2.3),

$$\vec{B}(M) = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \left[\iint_{\text{section}} \vec{j}.\overrightarrow{dS} \right] \overrightarrow{dl} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}$$

(iii) Comme l'integration de la densité de courant sur la surface n'est autre que le courant I

$$\iint_{\text{section}} \vec{j}(P).\overrightarrow{dS} = I$$

on obtient la Loi de Biot et Savart établie experimentalement en 1820.

3 Propriétés de symétrie de $\vec{B}$

En coordonnées cartesiennes par exemple, le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ se décompose comme

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

avec

$$B_x = B_x(x, y, z), \qquad B_y = B_y(x, y, z), \qquad B_z = B_z(x, y, z)$$

Connaitre le champ $\vec{B}$ revient alors à évaluer les fonctions

$$B_x,\ B_y,\ B_z$$

Pour détérminer explcitement ces quantités, on utilise:

- La loi de Biot et Savart
- Les propriétés de symétries du circuit

3.1 Méthode des symétries

L'idée de cette méthode repose sur la remarque suivante:

> *Lorsque une cause $(\mathcal{C})$ produit un effet $(\mathcal{E})$,*
> *les éléments de symétrie de $(\mathcal{C})$ doivent se retrouver dans $(\mathcal{E})$*

Cela veut dire que

si un circuit éléctrique admet une symétrie (s)
alors
$\vec{B}$ a la même symétrie (s)

Voyons comment cela fonctionne.

3.2 Application au calcul de $\vec{B}$

On se limitera ici à donner les regles:
6 regles de symetries à retenir

$(R1)$ *symétrie de translation*
Exemple: fil infini suivant $\overrightarrow{Oz}$ parcouru par un courant I (schema)
Pour calculer $\vec{B}(M)$, il est plus simple d'utiliser les coordonnées cylindriques

$$(\rho, \varphi, z)$$

Dans ce système, l'invariance par translation suivant $\overrightarrow{Oz}$ du fil se manifeste au niveau de $\vec{B}$ par:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \vec{B}(\rho, \varphi) \qquad \text{pas de } z \text{ !}$$

La symétrie de translation exige que $\vec{B}$ ne depend pas de la coordonnée z.

$(R2)$ *symétrie axiale*

Exemple: une spire d'axe $\overrightarrow{Oz}$ parcouru par un courant I.

Comme la spire est invariante dans toute rotation d'angle φ autour de $\overrightarrow{OZ}$, nous avons

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial\varphi} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \vec{B}\,(\rho, z) \qquad \text{pas de } \varphi\ !$$

Le champ $\vec{B}$ ne depend pas de la coordonnée φ.

$(R3)$ *symétrie cylindrique*

Cette symétrie englobe les 2 précédentes;

- Symétrie par translation et symétrie par rotation.
- Pour calculer $\vec{B}$, il faut utiliser les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z).

L'invariance cylindrique exige alors

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial z} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial\varphi} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \vec{B}\,(\rho) \qquad \text{pas de } z \text{ et pas } \varphi\ !$$

le champ $\vec{B}$ ne dépend que de la coordonnée ρ.

$(R4)$ *symétrie sphérique*

C'est l'exemple de système adméttant une symétrie radiale.

Dans ce cas on utilise les coordonnées spherique (r, θ, φ); l'invariance radiale implique

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial\theta} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial\varphi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{B} = \vec{B}\,(r) \qquad \text{pas de } \theta \text{ et pas } \varphi\ !$$

soit $\vec{B}$ ne dependant que de r.

Remarque

Ces regles de symetries sont aussi valables pour le calcul du champ éléctrique $\vec{E}$ et pour le potentiel vecteur $\vec{A}$ dont dérive l'induction magnétique, ($\vec{B} = rot\vec{A}$).

$(R5)$ *Plan de symétrie*:

Si le système admet un plan de symétrie $\Pi_s = (\vec{u}, \vec{v})$, en tout point M de ce plan:

– $\vec{B} = \vec{B}\,(M)$ est perpendiculaire au plan Π_s, càd:

$$\boxed{\vec{B} \perp \Pi_s} \qquad ; \qquad \vec{E}\ , \quad \vec{A} \in \Pi_s$$

ou encore

$$\vec{B} = B\,\vec{w}, \qquad \text{avec} \;\; \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Cette symétrie est très forte

une seule inconnue parmi les 3

Il faudrait toujours commencer par chercher s'il y a un Π_s.

– remarque: cette propriété s'énonce généralement comme suit:

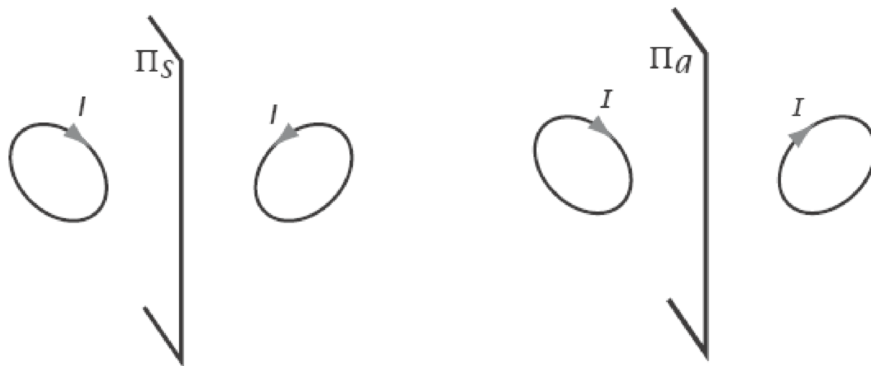


Figure 1: *plan de symétrie* Π_s *et plan d'antisymétrie* Π_a*. Noter bien le sens des courants.*

■ tout effet à caractère *pseudo-vectoriel*

comme $\vec{B}$

est perpendiculaire au plan Π_s,

■ tout effet à caractère *vectoriel*

comme $\vec{E}$ *et* $\vec{A}$

est contenu dans le plan Π_s, càd:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_u\vec{u} + E_v\vec{v} \\ \vec{A} &= A_u\vec{u} + A_v\vec{v} \end{aligned}$$

Pour les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{A}$, il faut donc calculer 2 coefficients parmi les 3.

$(R6)$ *Plan d'antisymetrie*

Si le système admet un plan de d'antisymétrie $\Pi_a = (\vec{u}', \vec{v}')$, en tout point M de ce plan:
– $\vec{B} = \vec{B}\,(M)$ est contenu dans le plan Π_a,

$$\boxed{\vec{B} \in \Pi_a \qquad ; \qquad \vec{E}\ , \quad \vec{A} \perp \Pi_a}$$

càd

$$\vec{B} = B_u \vec{u}' + B_v \vec{v}'$$

Cette antisymétrie reduit le calcul de $\vec{B}$ à 2 inconnues

$$B_u \quad et \quad B_v$$

Elle est *moins forte* que Π_s.

4 Trois exemples d'illustration

on étudiera 3 exemples de circuits filiformes.

4.1 Fil rectiligne

On considère un fil rectiligne suivant $\overrightarrow{Oz}$ parcouru par un courant I permanent $\left(\frac{dI}{dt} = 0\right)$.

fig 2

On se propose de calculer $\vec{B}\,(M)$ associée en utilisant les règles de symétrie. On distinguera 2 cas: fil fini et fil infini.

Fil infini

Ce circuit possède *plusieurs éléments de symétrie*

a) *Le fil a une symétrie cylindrique*; càd:
i) une invariance par translation selon l'axe $\overrightarrow{Oz}$ *et,*

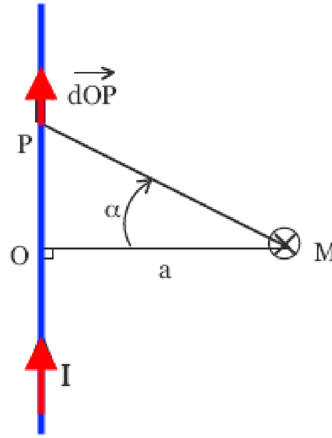


Figure 2: *champ d'induction magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant I permanent. Ce circuit a la symetrie cylindrique.*

ii) une invariance par rotation autour de cet axe.
Ces 2 éléments de symétrie indiquent coordonnées

$$(\rho, \varphi, z)$$

On a en tout point M

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(\rho, \varphi, z)$$

avec les conditions

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial \varphi} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{B}(\rho)$$

soit une fonction dépendant d'une seule variable ρ.

b) *Le fil a un plan symétrie* Π_s

Pour détérminer la direction de $\vec{B}$, on cherche s'il y'a un plan de symétrie Π_s ou d'antisymétrie Π_a. Le plan

$$\Pi_s = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$$

formé par le fil $\overrightarrow{OZ}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est un plan de symétrie.
Comme $\vec{B}$ est un pseudo vecteur, il doit donc être perpendiculaire à ce plan, d'après la regle $(R5)$.
Par conséquent:

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = B(\rho)\, \vec{e}_\varphi$$

c) *calcul de* $B(\rho)$ *par la loi de Biot & Savart*

on fera ce calcul d'abord pour le cas d'un *fil fini,* ensuite le cas *infini*

- le fil fini a une symétrie axial
- $\Pi_s = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie

$$\vec{B} = B(\rho, z)\,\vec{e}_\varphi$$

On détérmine le coefficent $B(\rho, z)$ par la loi de Boit et Savart

$$\vec{B}(M) = \int_{P\in \text{ circuit}} d\vec{B}$$

avec

$$\boxed{d\vec{B} = \tfrac{\mu_0}{4\pi} I\,\overrightarrow{dl} \wedge \tfrac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}}$$

ou (en posant $\rho = a$)

$$\begin{array}{rclcl} \overrightarrow{dl} & = & d\overrightarrow{OP} & = & dz\ \vec{e}_z \\ \overrightarrow{PM} & = & \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} & = & -z\vec{e}_z + a\ \vec{e}_\rho \end{array},$$

et

$$|PM|^3 = \left(a^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

Remplacons

$$\begin{array}{rcl} d\vec{B} & = & \frac{\mu_0 I}{4\pi(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz\ \vec{e}_z \wedge (-z\vec{e}_z + a\vec{e}_\rho) \\ & = & \frac{\mu_0 I a}{4\pi(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz\ \vec{e}_\varphi \end{array}$$

Pour avoir l'induction magnétique *totale*, on integre sur la variable

$$z \in \left]-\infty, \infty\right[, \text{ en général un fil fini } [\alpha_1, \alpha_2] \to .$$

Une facon plus simple est d'integrer sur l'angle $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vu que z et α sont reliés

$$\begin{array}{rcl} z & = & a\tan\alpha \\ dz & = & \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha \\ \cos\alpha & = & \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} \end{array}$$

ce qui conduit à

$$\begin{array}{rcl} \vec{B} & = & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha d\alpha \\ .... & = & \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha \end{array}$$

et par suite

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)\vec{e}_\varphi \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\vec{e}_\varphi\end{array}} \quad (4.1)$$

Le champ $\vec{B}$ est toroïdal.

4.2 Spire circulaire d'axe $\overrightarrow{OZ}$

Soit $\mathcal{S}$ une spire circulaire de rayon R, parcourue par un courant permanent I, voir fig 3. On veut calculer le champ magnétique $\vec{B}$ en M appartenant à l'axe $\overrightarrow{Oz}$ de la spire; soit

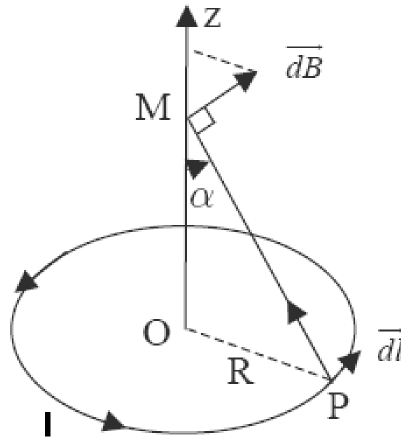


Figure 3: *Induction magnétique créé par une boucle de courant permanent I d'axe $\overrightarrow{OZ}$. La boucle a la symetrie axiale.*

a) *$\mathcal{S}$ a une symétrie axiale*
d'ou

$$\vec{B}\left(M\right) = \vec{B}\left(\rho, z\right) \quad \text{pas de } \varphi, \text{ d'après } (R2)$$

mais ici on a choisit M sur l'axe:

$$M = (0, 0, z)\,, \quad \Rightarrow \quad \vec{B}\left(M\right) = \vec{B}\left(z\right)$$

b) *calcul la direction de $\vec{B}$*
Comme $\mathcal{S}$ n'a y a pas de plan de symétrie *contenant M*, on cherche s' il y a des plans d'antisymetrie.
Les plans

$$\Pi_a = \left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_z\right), \qquad \Pi'_a = \left(\vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\right),$$

sont 2 plans d'antisymétrie qui contiennent M et qui coupent la spire en 2 parties anti-symétriques.
D'après la règle $(R6)$, on doit avoir:

$$\vec{B} \in \Pi_a \quad \text{et} \quad \vec{B} \in \Pi'_a$$

et donc

$$\boxed{\vec{B} \in \Pi_a \cap \Pi'_a = \overrightarrow{Oz} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B} = B(z)\,\vec{e}_z}$$

c) *calcul de* $B(z)$
On utilise la loi de *Biot et Savart*

$$\vec{B} = \int_{\text{spire}} d\vec{B}$$

ou

$$d\vec{B} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0}{4\pi} I d\overrightarrow{OP} \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{|PM|^3}$$

avec

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PM} &= R d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge (-R\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \\ &= R^2 d\varphi \vec{e}_z + Rzd\varphi \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

et

$$\sin\alpha = \frac{R}{|PM|} \qquad \Rightarrow \frac{1}{|PM|^3} = \frac{\sin^3\alpha}{R^3}$$

d'ou

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I \sin^3\alpha}{4\pi R^3}\left(R^2 d\varphi \vec{e}_z + Rzd\varphi \vec{e}_\rho\right)}$$

Comme

$$\int_0^{2\pi} (d\varphi \vec{e}_\rho) = \vec{e}_x \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi + \vec{e}_y \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0$$

le champ $\vec{B}(M)$ est

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I \sin^3\alpha}{2R}\vec{e}_z \\ &= \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z \end{aligned}} \tag{4.2}$$

4.3 Solénoide infini d'axe $\overrightarrow{OZ}$

Un solénoïde $\mathbb{S}$ est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur autour d'un cylindre d'axe Δ que nous prenons $\overrightarrow{Oz}$, voir 4. Le fil est parcouru un courant permanent I.
Pour calculer le champ $\vec{B}$ créé par $\mathbb{S}$ en un point $M \in \Delta$, on suppose que:

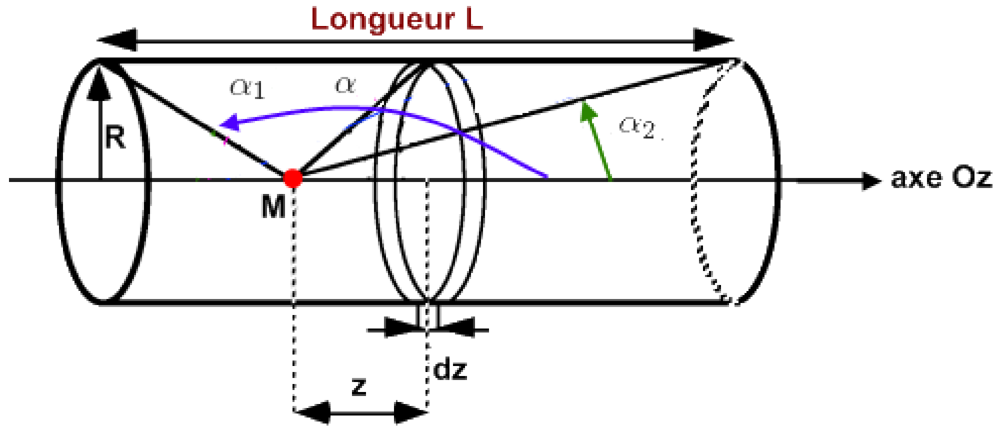


Figure 4: *Induction magnétique créé par une sélénoide de courant permanent I d'axe* $\overrightarrow{OZ}$

$i)$ le fil est suffisamment mince et imaginer le sélénoide comme une juxtaposition *continue* de spires coaxiales $\mathcal{S}_i$ de rayon R d'axe $\overrightarrow{Oz}$,
$ii)$ pour une épaisseur dz autour du point P du sélénoide, nous avons N spires. Cela veut dire que la densité dn de spires par unité de longueur du sélénoide est

$$dn = Ndz$$

Avec ces hypothèses, le sélénoide a donc les mêmes propriétés de symétrie que les spires.
Détermination de $\vec{B}$
Comme chaque spire $\mathcal{S}$, parcourue par un courant permanent I, créé un champ

$$\vec{b} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I \sin^3\alpha}{2R}\vec{e}_z \ , \qquad \tan\alpha = \frac{R}{z}$$

une densité dn de spires sur une épaisseur dz autour du point P créé en tout point de l'axe Δ un champ élémentaire

$$\boxed{\begin{aligned} d\vec{B} &= \vec{b}dn = N\vec{b}dz \\ &= N\vec{b}\tfrac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha \end{aligned}}$$

avec

$$dz = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

Remplacons

$$d\vec{B} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0 NI}{2} \sin \alpha d\alpha \vec{e}_z$$

Le champ $\vec{B}$ est obtenu par intégration

$$\vec{B} \quad = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\vec{B} \quad = \vec{e}_z \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I}{2} \sin \alpha d\alpha$$

ce qui donne pour un sélénéoide fini ($\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$)

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0 NI}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z} \tag{4.3}$$

Pour un sélénodie infini ($0 \leq \alpha \leq \pi$)

$$\boxed{\vec{B} = \boldsymbol{\mu}_0 NI \ \vec{e}_z = \overrightarrow{constante}} \tag{4.4}$$

5 Travaux dirigés: série I

Exercice 1 : *Rappels Mathématiques*

1) Gradient d'une fonction scalaire

(a) Donner $\text{grad}\, V = \vec{\nabla} V$ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

(b) En déduire l'expression de $\text{grad} \left(\frac{1}{r}\right)$

2) Divergence d'un vecteur

(a) Donner $\text{div}\, \vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E}$ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

(b) en déduire $\text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$

3) Rotationnel d'un vecteur

(a) Donner $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ en coordonnées cartésiennes

(b) En déduire : (i) $\vec{\nabla} \wedge \text{grad}\, V$, (ii) $\vec{\nabla}.\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

4) Calcul intégral

(a) Donner le théorème de stokes reliant une intégrale double à une intégrale triple

(b) Donner le théorème de Green Ostogradsky reliant une intégrale simple à une double

Exercice 2

Un courant d'intensité I circule dans une spire circulaire de centre O et de rayon R. On se propose de calculer le champ d'induction magnétique $\vec{b}(M)$ crée au point M de l'axe $\overrightarrow{Oz}$ de la spire.

1) Par des considérations de symétrie, déterminer:
  (a) Les variables dont dépend $\vec{b}(M)$,
  (b) La direction de $\vec{b}(M)$

2) A l'aide de la loi de Biot et Savart, déterminer:
  (a) L'expression du champ $\vec{b}(M)$ en fonction de z,
  (b) L'expression de $\vec{b}(M)$ en l'angle α

3) En déduire la valeur du champ:
  (a) Au centre de la spire, point $z = 0$,
  (b) Dans la limite z tend vers l'infini

4) Un enroulement de spires jointives identiques d'épaisseurs très faibles vis-à-vis des rayons des spires constitue une bobine plate.
  (a) Déduire de la question précédente le champ d'induction $\vec{B}(z)$ de la bobine
  (b) Justifier la réponse

5) Calculer circulation de $\vec{B}(z)$ le long de tout l'axe $\overrightarrow{Oz}$

Exercice 3

Un solénoïde $\mathbb{S}$ fini est constitué d'un enroulement d'un fil conducteur autour d'un cylindre d'axe Δ que nous prenons $\overrightarrow{Oz}$. Le fil, parcouru un courant permanent I, est suffisamment mince permettant d'imaginer le solénoïde comme une juxtaposition continue de spires coaxiales de rayon R d'axe $\overrightarrow{Oz}$

1) Faire un schéma illustratif, on notera les angles limites α_1 et α_2

2) Si pour une épaisseur dz autour du point P du solénoïde, nous avons N spires ; donner la densité dn de spires par unité de longueur du solénoide

3) On se propose de calculer le champ d'induction sur l'axe du solénoide,
  (a) Donner l'expression du champ élémentaire dB en fonction de $\vec{b}(z)$
  (b) Calculer le champ total $\vec{B}(z)$ en fonction de α_1 et α_2

4) En déduire la valeur du champ pour le cas d'un solénoide infini

Exercice 4

On considère un conducteur cylindrique homogène de base circulaire de rayon R et de longueur L supposée grande. Ce conducteur est parcouru par un courant volumique axial d'intensité I et de densité volumique $\vec{j} = j\vec{e}_z$.

1) Par des considérations de symétrie, déterminer:

(a) Les variables dont dépend l'induction magnétique $\vec{B}\,(M)$

(b) La direction de $\vec{B}\,(M)$

(c) Vérifier que $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

2) Déterminer l'expression du champ $\vec{B}\,(M)$ en tout point de l'espace

3) Déterminer les variables dont dépend le potentiel vecteur $\vec{A}\,(M)$

4) Déterminer la direction de $\vec{A}\,(M)$

5) Vérifier que $\operatorname{div}\vec{A} = 0$

6) A partir de la relation $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, déterminer l'expression de $\vec{A}\,(M)$ en tout point de l'espace

7) En déduire la constante d'intégration pour la condition $\vec{A}\,(\rho = R)$.

6 Solution (des indications)

Exercice 1

1) Gradient d'une fonction scalaire

(a) en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

en coordonnées sphériques

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

(b) En déduire l'expression de $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{e}_r}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

2) Divergence d'un vecteur

(a) en coordonnées cylindriques

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho E_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

en sphériques

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 E_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta E_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial E_\varphi}{r\sin\theta\partial\varphi}$$

(b) a priori

$$\text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(1\right)}{\partial r} = 0!$$

mais ceci n'est vrai que pour $r \neq 0$. Pour $r = 0$, cette quantité diverge; en effet on sait que pour le champ électrostatique $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$, on a:

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \neq 0$$

ce qui conduit à:

$$\text{div}\,\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\frac{\varrho}{q}, \qquad \varrho = q\delta\left(r\right), \quad \text{avec } \delta \text{ distribution de Dirac}$$

3) Rotationnel d'un vecteur

(a) Donner $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left|\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array}\right. = \left|\begin{array}{c} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{array}\right.$$

(b)

$$\begin{aligned} rot\left(\text{grad}\,V\right) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} V = \vec{0} \\ \text{div}\left(rotV\right) &= 0 \end{aligned}$$

4) relations de Stokes

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma=\partial V} \vec{A}.\overrightarrow{dS} &= \iiint_V \text{div}\,\vec{A}d\tau &&: \text{ Relation 1: Green-Ostogradsky} \\ \oint_{C=\partial S} \vec{A}.\overrightarrow{dl} &= \iint_S rot\vec{A}.\overrightarrow{dS} &&: \text{ Relation 2: Stokes} \end{aligned}$$

Exercice 2: *pour des détails voir section 4.2*

1) $i)\ \vec{b} = \vec{b}\,(z),\ \ ii)\ \vec{b} = b\,(z)\,\vec{e}_z$

2) loi de Biot et Savart

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I \sin^3\alpha}{2R}\vec{e}_z \\ &= \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z \end{aligned}$$

3) valeur du champ:

(a) Au centre de la spire: point $z = 0$

$$\vec{b} = \frac{\boldsymbol{\mu}_0 I}{2R}\vec{e}_z$$

(b) Dans la limite z tend vers l'infini

$$\vec{b} \to \vec{0}$$

4) bobine plate.

Le champ $\vec{B}$ est obtenu par application du

principe de superposition

c'est à dire que le champ total $\vec{B}\,(z)$ créé par la bobine est la somme des champs créés par chacune des N spires: $N\vec{b}$

$$\begin{aligned} \vec{B}\,(z) &= \frac{\mu_0 NI}{2R}\sin^3\alpha\ \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 NI}{2R}\frac{b^3}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \vec{e}_z \end{aligned}$$

5) circulation de B le long de tout l'axe $\overrightarrow{Oz}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} B_z dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\right)dz \end{aligned}$$

Ensuite utlisons les relations

$$\begin{aligned}
\sin^3\alpha &= \tfrac{R^3}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
\tan\alpha &= \tfrac{R}{z}\\
z &= \tfrac{R}{\tan\alpha} = R\cot\alpha = R\tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\
dz &= \tfrac{-R}{\sin^2\alpha}d\alpha
\end{aligned}$$

et les bornes

$$\begin{aligned}
z = -\infty &\iff \alpha = \pi^-\\
z = \infty &\iff \alpha = 0^+
\end{aligned}$$

pour

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} B_z dz &= \int_{\pi^-}^{0^+}\left(\tfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\right)\tfrac{-R}{\sin^2\alpha}d\alpha\\
&= -\tfrac{\mu_0 I}{2}\int_{\pi^-}^{0^+}\sin\alpha d\alpha\\
&= \tfrac{\mu_0 I}{2}\int_{\pi^-}^{0^+} d\left(\cos\alpha\right)\\
&= \tfrac{\mu_0 I}{2}\left[\cos\alpha\right]_{\pi}^{0}\\
&= \mu_0 I
\end{aligned}$$

Exercice 3: voir sous -section 4.3

1) schéma illustratif, voir fig 3

2) densité dn de spires par unité de longueur du solénoide

$$\frac{dn}{dz} = N \quad \Rightarrow \quad dn = Ndz$$

3) (a) champ élémentaire

$$d\vec{B} = \vec{b}dn = N\vec{b}dz$$

avec

$$\vec{b} = \tfrac{\mu_0 I\sin^3\alpha}{2R}\vec{e}_z$$

et

$$z = \tfrac{R}{\tan\alpha} \quad \Rightarrow \quad dz = \tfrac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}$$

(b) champ total

$$\begin{aligned}
\vec{B}(z) &= \vec{e}_z\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\tfrac{\mu_0 IN\sin^3\alpha}{2R}\times\tfrac{Rd\alpha}{\sin^2\alpha}\\
&= \vec{e}_z\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\tfrac{\mu_0 IN}{2}\sin\alpha d\alpha
\end{aligned}$$

d'ou

$$\vec{B}(z) = \tfrac{\mu_0 IN(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)}{2}\vec{e}_z$$

4) Solénoide infini: $\alpha_1 = 0, \ \ \alpha_2 = \pi$

$$\vec{B} \ = \ \boldsymbol{\mu}_0 I N \vec{e}_z$$

Exercice 4: conducteur cylindrique

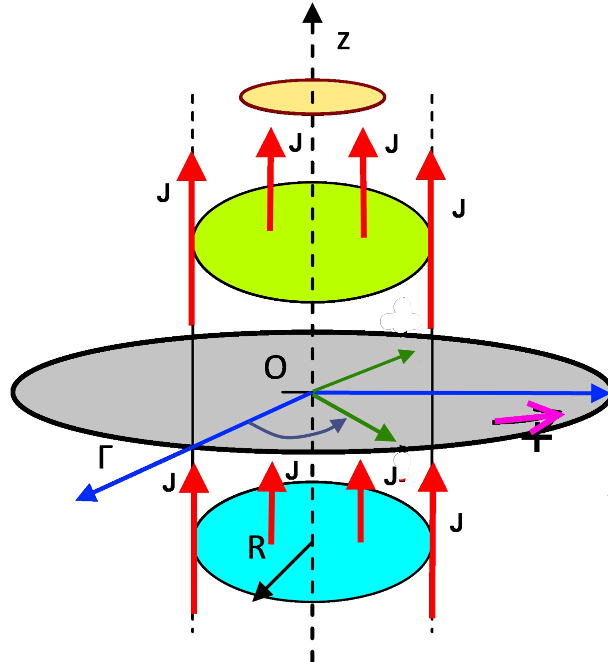


Figure 5: conducteur cylindrique parcouru par $J = je_z$. Coordonnées $M = (\rho, \varphi, z)$. Γ est la courbe d'Ampère.

1) (a) symétrie cylindrique implique:

$$\vec{B} = \vec{B}(\rho)$$

(b) direction de $\vec{B}$: le plan

$$\Pi_s \equiv (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z) \perp \vec{e}_\varphi \quad \textit{contenant } M$$

est un plan de symétrie du conducteur. Ceci implique

$$\vec{B} \perp \Pi_s \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{B} = B(\rho)\,\vec{e}_\varphi$$

(c) calcul de div $\vec{B}$: En coordonnées cylindriques, on a:

$$\begin{aligned} \text{div}\,\vec{B} &= \vec{\nabla}.\vec{B} \\ &= \tfrac{\partial B_\rho}{\partial \rho} + \tfrac{\partial B_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \tfrac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \tfrac{\partial B_\varphi}{\rho \partial \varphi} = 0 \text{ car } B = B(\rho) \text{ ne dépendant ni de } \varphi \text{ ni de z} \end{aligned}$$

2) Expression du champ $\vec{B}\,(M)$ en tout point de l'espace
par le Théorème d'Ampère (voir chap 2 pour plus de détails sur ce th)

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\overrightarrow{dl} \quad = \quad \mu_0 I \quad : \quad \text{Théorème d'Ampère}$$

ou Γ est la courbe d'Ampère.
Dans notre cas, Γ est un cercle de rayon ρ passant par M
on a aussi

$$\begin{aligned}\vec{B} &= B\vec{e}_\varphi \\ \overrightarrow{dl} &= d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z\end{aligned}$$

soit

$$\vec{B}.\overrightarrow{dl} \quad = \quad \rho B d\varphi$$

Selon le choix de Γ on distingue deux cas:

$$\text{a) } \rho > R \qquad , \qquad \text{b) } \rho < R$$

i) cas $\rho > R$

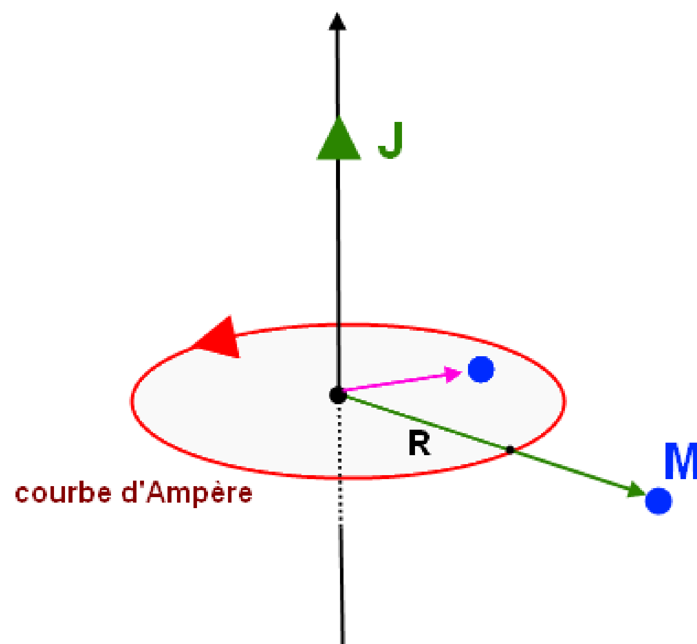


Figure 6: Courbe d'Ampère.

La courbe d'Ampère est un cercle de rayon ρ *passant par M*. Comme $\rho > R$, le

courant traversant $\mathcal{S}$ délimitée par Γ est

$$I = \int_{\mathcal{S}} \overrightarrow{J}.\overrightarrow{dS} = \int_S j\ dS$$

avec $\partial\mathcal{S} = \Gamma$ et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{J} &= j\ \overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{dS} &= dS\ \overrightarrow{e_z} \end{aligned}$$

d'ou

$$I = \int_{0\leq\rho\leq R} j\ dS\ + \int_{\rho>R} \underbrace{j}_{=0}\ dS$$

et donc

$$I = j\pi R^2$$

Le théorème d'Ampère implique

$$\begin{aligned} \mu_0 I &= \oint_{C_\Gamma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} \\ &= \oint_0^{2\pi} B_\varphi\left(\rho d\varphi\right) \\ &= \rho B_\varphi \oint_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi\rho B_\varphi \end{aligned}$$

D'ou

$$\boxed{B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad \text{avec} \quad I = j\pi R^2}$$

<u>*ii)* cas $\rho < R$</u>

Dans ce cas seule une partie du courant contribue car

$$\begin{aligned} I_{int} &= \int_S \overrightarrow{J}.\overrightarrow{dS} = j\int_S dS, \qquad \partial S = \Gamma \\ &= j\pi\rho^2 \\ &= \left(j\pi R^2\right)\frac{\rho^2}{R^2} \\ &= I\frac{\rho^2}{R^2} \end{aligned}$$

le théorème d'Ampère donne

$$\begin{aligned} \mu_0 j\pi\rho^2 &= \mu_0 I\frac{\rho^2}{R^2} \\ &= \oint_{C_\Gamma} \vec{B}.\overrightarrow{dl} \\ &= \oint_0^{2\pi} B_\varphi\left(\rho d\varphi\right) \\ &= 2\pi\rho B_\varphi \end{aligned}$$

soit:

$$2\pi\rho B_\varphi \quad = \quad \mu_0 I \tfrac{\rho^2}{R^2}$$

et donc

$$\boxed{B_\varphi \quad = \quad \mu_0 I \tfrac{\rho}{2\pi R^2}}$$

3) variables de $\vec{A}(M)$:

symétrie cylindrique implique:

$$\vec{A} = \vec{A}(\rho)$$

il n'y a pas de variable z ni de variable φ

4) direction de $\vec{A}(M)$. Le plan de symetrie Π_s implique

$$\vec{A} \in \Pi_s$$

càd qu'on a chercher 2 composantes. Mais comme le plan

$$\Pi_a = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi) \quad \text{est un plan d'antisymétrie}$$

et que

$$\vec{A} \ \perp \ \Pi_a$$

on a

$$\boxed{\vec{A} = A(\rho)\ \vec{e}_z}$$

5) Vérifier que $\operatorname{div}\vec{A} = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{A} &= \vec{\nabla}.\vec{A} \\ &= \tfrac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \tfrac{\partial A_\varphi}{\rho\partial\varphi} + \tfrac{\partial A_z}{\partial z} = \tfrac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= 0, \quad \text{car ne dépend pas de z} \end{aligned}$$

6) Expression de $\vec{A}(M)$ en tout point de l'espace

A partir de

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

soit en éffectuant

$$\left| \begin{array}{l} B_\rho(\rho) \\ B_\varphi(\rho) \\ B_z(\rho) \end{array} \right. \quad = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial\rho} \\ \frac{\partial}{\rho\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial\rho} \\ 0 \end{array} \right.$$

soit

$$B_\varphi(\rho) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \quad \Leftrightarrow \quad A_z = -\int B_\varphi d\rho$$

on distingue 2 cas

$$\begin{array}{lll} \alpha) \ \rho > R & : & B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \\ \beta) \ \rho < R & : & B_\varphi = \mu_0 I \frac{\rho}{2\pi R^2} \end{array}$$

α) $\underline{\rho > R}$

$$\boxed{A_z(\rho) = -\int \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\rho + cte}$$

7) la condition sur $\vec{A}$ permet de déterminer la constante pour $\rho = R^+$

$$A_z(\rho = R) = 0 \quad \Rightarrow \quad cte = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R$$

soit

$$\boxed{A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\rho + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\frac{\rho}{R}}$$

β) $\underline{\rho < R}$

$$A_z(\rho) = -\int \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} d\rho = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\rho^2 + cte'$$

La condition sur $\vec{A}$ permet de déterminer la constante $\rho = R^-$

$$A_z(\rho = R) = 0 \quad \Rightarrow \quad cte' = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} R^2$$

soit

$$\begin{aligned} A_z(\rho) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\rho^2 + \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} R^2 \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \end{aligned}$$